Universidad Nacional de Asunción

Facultad Politécnica

Adaptive Control Strategy for restarting GMRES

Juan Carlos Cabral Figueredo

Tesis presentada a la Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, como requisito para la obtención del Grado de Doctor en Ciencias de la Computación.

San Lorenzo - Paraguay

Octubre, 2019

Universidad Nacional de Asunción

Facultad Politécnica

Adaptive Control Strategy for restarting GMRES

Juan Carlos Cabral Figueredo

Orientador:

Prof. Christian E. Schaerer S., D.Sc.

Tesis presentada a la Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, como requisito para la obtención del Grado de Doctor en Ciencias de la Computación.

San Lorenzo - Paraguay

Octubre, 2018

Hoja de aprobación de Tesis

ADAPTIVE CONTROL STRATEGY FOR RESTARTING GMRES

Juan Carlos Cabral Figueredo

Tesis de Doctorado aprobada el 4 de Octubre de 2019 por los siguientes miembros del Jurado de Defensa:

Dr. Amit Bhaya (UFRJ, Brasil)
Dr. Raul Gregor (FIUNA)
Dr. Fernando Brunetti (UCA)
Dr. Horacio Legal Ayala (FPUNA)
Dr. Eduardo De Los Santos (FPUNA)
Dr. Christian Schaerer (FPUNA), orientador

Prof. Dr. Horacio A. Legal Ayala
Coordinador Académico
Postgrado en Ciencias de la Computación
Facultad Politécnica
Universidad Nacional de Asunción

Prof. DSc. Christian Schaerer
Orientador

APENDICE A

A Summary in Spanish

Hoy en día, la resolución eficiente de un sistema lineal de ecuaciones es muy importante. Esto se debe a la llegada de nuevas arquitecturas computacionales, así como el uso extensivo de aplicaciones informáticas para problemas nuevos y más complejos en ciencia, ingeniería e incluso en el uso diario. Un sistema lineal de ecuaciones se puede expresar en su forma matricial de la siguiente forma,

$$Ax = b, \tag{A.1}$$

donde la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es no singular y $b, x \in \mathbb{C}^n$.

En aplicaciones prácticas, muchas matrices son dispersas (pocos elementos distintos de cero) y tienen una estructura definida. Estas matrices surgen, por ejemplo, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales. El sistema lineal de ecuaciones se puede resolver utilizando varios métodos que se clasifican en métodos directos e iterativos. Los métodos directos permiten obtener la solución exacta en un número finito de operaciones. Algunos métodos que pueden clasificarse como métodos directos son, por ejemplo, la eliminación de Gauss, la factorización de Gauss-Jordan, LU y QR. El problema de usar métodos directos consiste en el hecho de que solo pueden aprovechar parcialmente la escasez de valores no nulos y la estructura de matrices generales [21].

Los métodos iterativos generan una secuencia de aproximaciones que convergen a la solución del sistema lineal de ecuaciones. Los más popularizados son aquellos que utilizan multiplicaciones de matriz-vector para aprovechar la dispersión y la estructura de la matriz. De hecho, si una matriz cuadrada $n \times n$ tiene solo k entradas distintas de cero por fila ($k << n$), entonces el producto de esta matriz con un vector sólo necesitará kn operaciones, en comparación con las $2n^2$ operaciones que se requerirían para una multiplicación matriz-vector, donde la matriz es densa (pocos valores ceros). Por lo tanto, solo es necesario almacenar algunas entradas distintas de cero de la matriz para los métodos iterativos [5, 21].

Además de la dispersión y la estructura de la matriz involucrada en el sistema lineal, la complejidad del algoritmo es una característica importante. En términos generales, los métodos directos tienen una complejidad de orden $O(n^3)$, el cual es poco práctico cuando n es grande [37, 42], mientras que los métodos iterativos pueden manejar mejor la complejidad si el número de iteraciones para obtener la convergencia se mantiene bajo control. Esta es una clara ventaja. Desafortunadamente, hay circunstancias en las que el método iterativo requiere muchas iteraciones para llegar a la solución e incluso en determinadas ocasiones no convergen. En estas situaciones, algunas estrategias para recuperar la velocidad de convergencia son necesarias para que sean competitivos. Esta, de hecho, es una de las motivaciones de esta Tesis.

En el contexto de los métodos iterativos y debido a la posibilidad de explorar adecuadamente la multiplicación matriz-vector, normalmente se prefieren los métodos basados en el subespacio Krylov [37]. Existe una familia de métodos dependiendo de las características de la matriz A involucrada.

Para sistemas lineales donde la matriz A es simétrica positiva definida, el método iterativo más popular es el Gradiente Conjugado (CG) [21, 28, 42]. Sin embargo, en el caso de matrices no simétricas, la elección es más difícil [28, 42]. Para matrices generales, matrices indefinidas y no simétricas, normalmente se elige el Método Residuo Mínimo Generalizado (GMRES) o el Método de Ortogonalización Completa (FOM) en cualquiera de sus variantes. Entre las variantes más populares del GMRES está el GMRES con reinicio o simplemente GMRES(m) [37]. Dado que GMRES es un método iterativo que minimiza la norma residual con una larga recurrencia, en la práctica debido a limitaciones de memoria, se reinicia cada número generalmente fijo de iteraciones. La estrategia de reinicio permite mantener el requisito de memoria bajo control, pero si se encuentran problemas de convergencia, el GMRES(m) tiene un alto costo o no obtiene la solución en un tiempo computacional prudencial. Esta Tesis concentran los esfuerzos en el análisis de la desaceleración de la convergencia y en los problemas de estancamiento del GMRES(m), buscando estrategias para superar los problemas del procedimiento de reinicio.

Este trabajo no cubrió los siguientes temas: consideraciones para computadoras paralelas, métodos para matrices singulares, selección del preacondicionador más apropiado, métodos con múltiples lados derecho y matrices en bloque. Todos estos temas y sus combinaciones pueden considerarse como trabajos futuros. En este resumen, se presentan los métodos de subespacio de Krylov, el método GMRES con algunas de sus variantes y consideraciones para métodos iterativos eficientes. Se presentan características de convergencia para el GMRES y otros métodos de subespacio de Krylov desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

Originalidad y Relevancia

El énfasis de esta Tesis consiste en mejorar el rendimiento GMRES con reinicio al comprender su comportamiento de convergencia y considerar implementaciones que modifican el subespacio de búsqueda de soluciones.

En este trabajo, los métodos iterativos conocidos como métodos del subespacio de Krylov (en particular el GMRES) son formulados como un sistema discreto dinámico con un control de retroalimentación. Son discutidos también, las condiciones para la convergencia del método en su forma reiniciada. Usando la formulación propuesta, se introducen técnicas de desinflado (en inglés *deflated*) y aumento del subespacio de Krylov para evitar el estancamiento o la convergencia lenta. El estancamiento y la convergencia lenta son problemas difíciles, y normalmente cuando se los encuentra, el ingeniero desconfía si el problema está en la formulación del problema o tiene que cambiar el método iterativo. Por esta razón, la implementación de una técnica confiable para superar el estancamiento y la convergencia lenta es un tema crítico para obtener una solución en un tiempo de ejecución razonable.

Problemas de investigación y Objetivos

Esta tesis doctoral presenta nuevos descubrimientos en relación con los métodos de Krylov reiniciados para sistemas lineales no simétricos utilizando una perspectiva de Teoría de control. En particular, se investigan los siguientes problemas:

- Cómo formular y resolver sistemas lineales no simétricos desde una perspectiva de Teoría del control.
- Cómo introducir una técnica óptima de desinflado y aumento del subespacio del GMRES(m) para superar el estancamiento y convergencia lenta.
- Cómo utilizar un controlador en un sistema de estructura variable para superar el estancamiento y la convergencia lenta en el contexto de GMRES(m).

Objetivo General

Formular y resolver sistemas lineales no simétricos desde una perspectiva de Teoría de Control con enfoque en superar el estancamiento y la convergencia lenta del GMRES(m).

Objetivos Específicos

1. Explorar, analizar y clasificar métodos para resolver ecuaciones lineales. Obtener una comprensión sistemática de los enfoques y formulaciones existentes.

2. Caracterizar los problemas que se presentan en la convergencia de GMRES(m).

3. Utilizar sistemas de estructuras variables para lograr un mejor rendimiento del GMRES(m).

4. Desarrollar un algoritmo diseñado para resolver problemas de estancamiento y convergencia lenta.

A.1 Métodos de Subespacio de Krylov

Los métodos de subespacio de Krylov son métodos iterativos útiles para sistemas de ecuaciones lineales dispersos muy grandes, para los cuales los métodos directos son demasiado costosos en términos de tiempo y almacenamiento de memoria [21]. Estos métodos se utilizan ampliamente para la solución iterativa de sistemas lineales de ecuaciones de la forma (A.1).

Sea x_0 una aproximación inicial y $r_0 = b - Ax_0$ el residual inicial. Los métodos de Krylov encuentran una solución aproximada,

$$x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0), \tag{A.2}$$

donde $\mathcal{K}_k(A, r_0) = \{r_0, Ar_0, \cdots, A^{k-1}r_0\}$ indica el subespacio Krylov de dimensión k definido por A y r_0. Estos métodos a menudo se denominan métodos polinomiales ya que (A.2) implica que la solución aproximada se puede escribir de la siguiente forma

$$x_k = x_0 + q_k(A, r_0), \tag{A.3}$$

donde q_k es un polinomio en A de grado $\leq k - 1$ [37]. El vector residual es $r_k = b - Ax_k = b - A(x_0 + q_k(A, r_0)) = r_0 - Aq_k(A, r_0) = p_k(A)r_0$, donde p_k es un polinomio de grado k o menos con $p(0) = 1$.

La solución aproximada (A.2) se encuentra a menudo como minimizador de algún funcional, esto implica que cada método de Krylov define implícitamente un polinomio diferente p_k [42]. Por ejemplo, en GMRES, la aproximación x_k minimiza la norma 2 del vector residual r_k [37].

Algunos métodos tienen mejor rendimiento para algunos problemas, y no para otros. No hay un método que pueda recomendarse para todos los problemas [42]. Por lo tanto, elegir qué algoritmo usar para un problema particular no es trivial, particularmente para matrices no simétricas.

A.1.1 Método GMRES

El método GMRES es actualmente el más popular para resolver problemas con matrices no simétricas [42]. Este método utiliza el algoritmo de Arnoldi para construir una base ortonormal para el subespacio de Krylov. La mejor solución aproximada se extrae de una base ortonormal de Krylov, y por su construcción se garantiza que la solución encontrada, indicada por x_k, minimiza la norma 2 (norma euclidiana) del vector residual [37, 38].

Para GMRES, el k-ésimo vector residual $r_k = b - Ax_k$, satisface:

$$r_k \perp A\mathcal{K}_k(A, r_0), \tag{A.4}$$

esto significa que en términos de la condición de Petrov-Galerkin, se obtiene $\mathcal{L}_k := A\mathcal{K}_k(A, r_0)$. Para generar la solución aproximada, se construye una base ortonormal para el subespacio de Krylov $\mathcal{K}_k(A, r_0)$. Esto se puede lograr utilizando el procedimiento Gram-Schmidt modificado o el procedimiento de Householder en el algoritmo de Arnoldi. Aunque el método Householder es más estable, es más lento que Gram-Schmidt modificado [37]. Para la implementación de GMRES, en este trabajo, el algoritmo de Arnoldi se utiliza con el procedimiento Gram-Schmidt modificado.

Considerando aritmética exacta en los cálculos, el método GMRES converge al menos en n iteraciones, pero el costo de calcular la base ortonormal del subespacio de Krylov aumenta a medida que avanzan las iteraciones. Para reducir el costo del GMRES, a menudo se usa una versión reiniciada, que se reinicia después de cada ciclo de m iteraciones. La versión reiniciada se denota por GMRES(m) [38].

A.1.2 Versión reiniciada del GMRES

El método GMRES con reinicio, denominado GMRES(m), realiza m iteraciones del GMRES, y luego la solución aproximada resultante se usa como la estimación inicial para realizar otras m iteraciones. Este proceso se repite hasta que la norma residual sea lo suficientemente pequeña. El grupo de m iteraciones entre reinicios sucesivos se conoce como ciclo, y m es el parámetro de reinicio. Indicamos el número del ciclo de reinicio con un superíndice: $x_m^{(j)}$ es la solución aproximada después de j ciclos o $m \times j$ iteraciones totales y $r_m^{(j)}$ es el vector residual correspondiente.

A.1.3 Convergencia del GMRES

En esta subsección, introducimos algunos conceptos útiles para la comprensión del comportamiento de convergencia del GMRES. El vector residual está asociado con el polinomio residual p_k, es decir, $r_k = p_k(A)r_0$. Por lo tanto, la norma residual satisface

$$\|r_k\| \leq \|p_k(A)\|\|r_0\|,$$

para algunos $p_k \in \pi_k$, donde π_k es el conjunto de todos los polinomios p de grado k o menor, tal que $p(0) = 1$ y $\|p_k(A)\|$ es la norma de la matriz inducida de $p_k(A)$. Este simple límite muestra que se puede obtener una estimación de la convergencia de la norma residual mediante el análisis del comportamiento del polinomio asociado en A. Se debe tener en cuenta que esta estimación no comsidera la acción de r_0 en el polinomio matricial, por lo tanto, no es aguda en la mayoría de los casos [26, 42].

Suponiendo que A es diagonalizable de modo que existe una matriz no singular X de autovectores de A y una matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ correspondientes a los autovalores de la matriz A, de manera que $A = X\Lambda X^{-1}$. Por lo tanto,

$$\|r_k\| \leq max_{i=1,\cdots,n}|p_k(\lambda_i)|\|X\|\|X^{-1}\|\|r_0\|.$$

Si la matriz de coeficientes A es una matriz normal (por ejemplo, simétrica), entonces X es unitario, de modo que $\|X\| = \|X^{-1}\| = 1$, por lo tanto, se puede obtener un límite superior para el residuo analizando solo el comportamiento del polinomio residual en los valores propios de A. Cuando A es simétrica definida positiva y el método CG es empleado, se puede demostrar que una relación similar se mantiene para la norma A del error, que es la cantidad minimizada por el método CG [28, 42].

En el caso de interés de esta Tesis, la matriz A es no simétrica. Para este caso, se puede obtener un problema polinomial de máximo y mínimo utilizando un método de minimización residual, como el GMRES. En este caso,

$$\|r_k\| \leq \|X\|\|X^{-1}\| \min_{p_k \in \pi_k} \max_{i=1,\cdots,n} |p_k(\lambda_i)|\|r_0\|.$$

Sin embargo, en el caso de matrices altamente no normales, el límite anterior puede ser una estimación muy pobre de la convergencia real, porque $\|X\|\ |X^{-1}\|$ puede ser muy grande. Cuando se utiliza una técnica de aproximación polinomial, todavía se necesita una comprensión completa del comportamiento de convergencia [42].

El comportamiento de convergencia del GMRES no está totalmente comprendido hasta ahora y quedan varias preguntas abiertas. Como resultado, predecir su efectividad en un problema particular no es trivial. Pero además, describir el comportamiento de convergencia del GMRES(m) es incluso más desafiante que el GMRES. Por ejemplo, incluso en el caso de que la norma residual no aumente con iteraciones sucesivas (y se reinicie), puede que no disminuya. En este caso, se hace referencia a que el GMRES(m) se estanca.

En principio, podemos creer en la afirmación de que " cuanto más se acerca el parámetro de reinicio m a n, más probable es que el método converja ". Sin embargo, hay ejemplos que contradicen la suposición de que un parámetro de reinicio más grande necesariamente resulta en una mejor propiedad de convergencia (converge en menos iteraciones) [13, 14]. Por lo tanto, una dificultad para el GMRES(m) es elegir un m apropiado para un problema particular, de modo que el método converja y el tiempo de solución sea razonable.

En [13], Embree demuestra que el comportamiento de la convergencia del GMRES(m) puede ser sorprendentemente sensible al vector residual inicial. Sin embargo, no se sabe cómo identificar matrices que exhiban tal sensibilidad. En [26], Joubert investiga el efecto del parámetro de reinicio m en la convergencia y el costo de reiniciar GMRES. También se discute un procedimiento de adaptación para determinar cómo variar el parámetro de reinicio. Este procedimiento de adaptación funciona bien en el caso simétrico y, en general, parece ser útil para los casos en que A es definida. Sin embargo, la estrategia no es efectiva para todos los problemas con matrices no hermitianas. El procedimiento de adaptación no puede predecir caídas repentinas en la norma residual después de los largos períodos de estancamiento que a menudo ocurren cuando A es no hermitiana, es indefinida o tiene grupos de autovalores muy próximos. Joubert afirma que esta incapacidad es "una limitación inherente de la información del subespacio de Krylov". En otro trabajo similar, Simoncini analiza la dependencia del vector de inicio en el GMRES(m) [41]. Ella señala que ante un estancamiento, el espacio de aproximación de Krylov del ciclo anterior es casi el mismo que el espacio de aproximación actual.

A.1.4 Modificaciones para mejorar GMRES(m)

Existen varias alternativas para evitar el estancamiento y acelerar la velocidad de convergencia de los métodos de subespacio de Krylov. Por ejemplo, el enriquecimiento del subespacio de Krylov a través de la información de los ciclos anteriores [2, 28, 32]; o modificando el parámetro de reinicio m [1, 7, 8, 26, 48]. Además, se puede mencionar la técnica de deflación, cuyo objetivo general es eliminar componentes que supuestamente ralentizan la convergencia [18, 28–30]. Típicamente, estos son componentes que corresponden a autovalores pequeños (en magnitud). La deflación puede mejorar significativamente la convergencia y robustez del GMRES(m) al permitir la resolución de muchos problemas difíciles que tienen autovalores pequeños [30]. En las técnicas de aumento, el método del subespacio Krylov se amplía mediante un subespacio elegido adecuadamente. Un objetivo típico es agregar información sobre el problema al espacio de búsqueda que se revela lentamente en el subespacio de Krylov, por ejemplo, autovectores correspondientes a autovalores pequeños [28]. Con frecuencia, la deflación se combina con el aumento, pero ambas técnicas se pueden aplicar por separado [18].

Las primeras técnicas de deflación y aumento propusieron variantes del método de CG con deflación para acelerar la velocidad de convergencia para matrices simétricas definidas positivas (SPD) [18]. Para sistemas no simétricos, la estrategia de deflación que incluye autovectores aproximados en el GMRES(m), es propuesta por primera vez por Morgan en sus artículos [28–30], mientras que una implementación más estable se propone en [30] pero la última no garantiza una curva no creciente de la norma 2 del vector residual. El éxito de estas estrategias de deflación también depende de que la matriz no esté muy lejos de lo normal [28, 42]. Las estrategias de aceleración, incluido el aumento del subespacio de búsqueda para métodos residuales mínimos, fueron analizadas en [12, 36]. No solo se eligen autovectores aproximados para ser utilizados en el enfoque de aumento de deflación. Vectores de Schur [30] y aproximaciones del error [2] pueden ser utilizados en lugar de autovectores aproximados para aumentar el subespacio de búsqueda. En principio, la deflación y el aumento pueden ser utilizados en todos los métodos de subespacio de Krylov para mejorar la tasa de convergencia, pero no pueden garantizar la convergencia.

Un área de investigación prometedora para mejorar el rendimiento del método de subespacio de Krylov con reinicio es la generalización de las estrategias de aumento. El espacio analizado incluye autovectores aproximados de ciclos anteriores, así como los vectores generados en el ciclo actual. Ejemplos de estas estrategias son GCROT propuesto por Sturler [10] y LGMRES ropuesto por Baker, Jessup, y Manteuffel [2].

En el último caso, en cada reinicio, se construye una solución aproximada utilizando el subespacio Krylov generado y la información del error de los subespacios anteriores. Desafortunadamente, estos métodos requieren la selección de parámetros, que pueden ser difíciles de ajustar [42]. En [16], Essai definió un producto interno diferente en el proceso de Arnoldi y presentó dos métodos modificados, denominados FOM ponderados (WFOM) y GMRES ponderados (WGMRES) para resolver sistemas lineales no simétricos. Más tarde, Q. Niu et al. cite QL12 presenta una técnica para acelerar la convergencia del método WGMRES mediante el uso de la estrategia de aumento con aproximación de errores propuesta por Baker et al. [2]. Los productos internos ponderados también se pueden aplicar a métodos GMRES de deflación, como GMRES-DR [14]. Si bien la mejora parece ser menos significativa que para GMRES(m), la ponderación a veces puede reducir el número de productos de matriz-vector incluso una reducción mayor respectos a la obtenida con la deflación sola o la ponderación sola. En [14], Embree et al. han argumentado que la ventaja del WGMRES se debe a su capacidad para romper ciclos repetitivos en el GMRES(m), y su capacidad para dirigirse a valores propios de pequeña magnitud que retardan la convergencia de GMRES.

En los métodos recientemente descritos, las normas residuales no son necesariamente no crecientes. Esto no debería ser un problema siempre que haya una tendencia a la baja, pero muchos científicos e ingenieros prefieren ver una curva descendente suave, y este hecho ha llevado a rechazar la selección de estas modificaciones. Además, una comprensión incompleta del producto interno ponderado que cambia en cada reinicio ha dificultado un mayor progreso.

En este trabajo, se estudia una modificación del GMRES(m) estándar inspirado en el control de estructura variable. Se intenta acelerar la convergencia aumentando el espacio de búsqueda utilizando informaciones apropiadas de los últimos ciclos. Algunas propiedades interesantes de la convergencia del GMRES(m) motivan los algoritmos propuestos. Además, agregamos estrategias de reinicio adaptativas para acelerar las diferentes versiones de GMRES(m) y superar el estancamiento.

A.2 Conclusiones del trabajo

El GMRES(m) es un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales, donde la matriz normalmente no es simétrica. El GMRES (m) es un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales, donde la matriz normalmente no es simétrica. El reinicio para reducir los costos de almacenamiento y ortogonalización no asegura la convergencia, por lo tanto, GMRES (m) eventualmente puede exhibir un estancamiento o una tasa de desaceleración de la convergencia.

Esta tesis doctoral formula el GMRES(m) desde una perspectiva de Teoría de Control con un enfoque para evitar el estancamiento y la desaceleración de la convergencia (Objetivo General).

Se presentaron algunos métodos adaptativos para evitar el estancamiento y la convergencia lenta, y estos fueron comparados con otros métodos iterativos del Estado del Arte (Objetivo específico 4). Para este fin, basado en las definiciones de la literatura, el estancamiento y la desaceleración de la convergencia se caracterizaron utilizando ángulos entre iteraciones y ciclos del GMRES(m), la estructura de las matrices de la relación de Arnoldi y una función de Lyapunov como condición suficiente para la estabilidad del método iterativo (objetivo específico 2). Las propuestas modifican la estructura del GMRES(m) y al mismo tiempo varían el parámetro de reinicio si es necesario. La combinación de técnicas, así como la forma sencilla de ampliar y enriquecer el subespacio, proporcionan mejores propiedades de convergencia en relación a implementar un enriquecimiento específico (Objetivo específico 1).

La idea detrás de la variación de la estructura del GMRES(m), se basa en el hecho de que una vez que se detecta la desaceleración de la convergencia o el estancamiento, una regla de control elige la variación más adecuada para enfrentar el problema de convergencia identificado (Objetivo específico 3). Los métodos adaptativos presentados en este trabajo proponen una forma eficiente de explotar la información del subespacio de Krylov para evitar el estancamiento. Los resultados numéricos muestran la importancia de las estrategias adaptativa, así como la efectividad de los métodos propuestos en una variedad de problemas de diferentes áreas de aplicación. La tasa de convergencia es mejorada en todos los problemas probados, incluso cuando los métodos estándares fallan.

A.2.1 Trabajos futuros

Muchas preguntas y oportunidades quedan para el estudio futuro, algunas de ellas son:

- Selección del preacondicionador más apropiado que se puede combinar con los métodos de adaptación propuestos.

- Análisis de otros métodos iterativos que pueden incluir estructuras variables e incluir versiones en bloque de los métodos de subespacio de Krylov.

- Definir una dimensión óptima del subespacio de enriquecimiento y un procedimiento para obtener una regla de conmutación efectiva entre otras técnicas que no necesariamente tenga una tasa de convergencia no creciente, como los métodos DGMRES(m, d), WGMRES(m) o combinación de ellos. En los casos anteriores, será necesario un análisis preliminar del estancamiento y modificar la función candidata de Lyapunov que permita definir una condición suficiente de estabilidad.

- Realizar una exploración de clases particulares de problemas para los cuales el método de conmutación propuesto sea más efectivo.

- Explorar la integración numérica de sistemas rígidos para mejorar la resolución de un sistema lineal de ecuaciones.