“CONACYT, desarrollando cultura de ciencia, tecnología, innovación y calidad”

FINANCIAMIENTO DE BECAS DE INVESTIGACIÓN (PRIMERA CONVOCATORIA)

Contagio en Redes Financieras y Algoritmos Cuánticos para Logística de Cargas

Universidad Nacional de Asunción

Marcos Villagra – mvillagra@pol.una.py

RESUMEN

En este proyecto se propuso el desarrollo de dos temas de investigación: (1) la construcción de un modelo de optimización cuadrática para un problema de empaquetamiento en aviones, y (2) la búsqueda de un algoritmo para la predicción de contagio en redes financieras cuando no se conoce la estructura de la red bancaria. Aunque estudiar dos temas diferentes en una estancia de investigación corta puede parecer muy difícil, ambos temas ya se encontraban en una etapa de inicio de sus investigaciones. Este resumen de resultados presenta de forma rigurosa, pero no muy detallada, los resultados obtenidos en ambos temas propuestos. Varios de los detalles técnicos son omitidos deliberadamente para mantener la confidencialidad de los resultados.

OBJETIVOS

(1) Construir un modelo de optimización matemática para desarrollar un algoritmo cuántico adiabático para el problema de logística de carga en aviones.

(2) Proponer un algoritmo eficiente para la detección de una estructura de núcleo-periferia y su aplicación para la detección de contagio en redes financieras.

Carga de Contenedores en Aviones

En esta sección presentamos el modelo de optimización para el problema ALO. Recordemos que ALO proviene del inglés *Aircraft Optimization Problem* y consiste en un problema de optimización de dos etapas: (1) maximizar la masa de contenedores que se cargan en un avión, y (2) minimizar la desviación del centro de masa del avión y los contenedores. Este fue un problema propuesto dentro del *Airbus Quantum Computing Challenge* y es por lo tanto de mucho interés en la industria de la aviación.

En el problema ALO tenemos n contenedores con tres diferentes tamaños. Un avión se divide en N posiciones (ver Fig. 1). Los contenedores de tamaño 1 ocupan una posición, los contenedores de tamaño 2 ocupan media posición, y los contenedores de tamaño 3 ocupan dos posiciones adyacentes. Cada contenedor está descrito por una tripleta (k,m_k,s_k) donde k es el número de identificación, m_k es la masa asociada y s_k es el tipo de contenedor con $s_k \in\{1,2,3\}$. El problema ALO considera las siguientes restricciones:

1) ubicación de los contenedores,
2) capacidad máxima del avión,
3) el centro de gravedad del avión cargado, y
4) límites de corte del fuselaje.

En la restricción 1), los contenedores deben cargarse en el avión de forma consistente de acuerdo con su tipo. En la restricción 2), la masa total de los contenedores cargados no debe de exceder la capacidad máxima W_p. En la restricción 3), el centro de gravedad x_{cg} debe de estar en un intervalo $[x^{min}_{cg}, x^{max}_{cg}]$. Finalmente, en la restricción 4), la curva de corte del fuselaje $S(x)$ definido por la distribución de contenedores debe de estar acotado por un valor máximo $S^{max}(x)$.

Otro objetivo para considerar es la minimización de la desviación del centro de gravedad con respecto a un valor x^t_{cg}. En otras palabras, el centro de gravedad x_{cg} del avión cargado debe de estar lo más cerca posible a x^t_{cg}. La Tabla 1 presenta un resumen los subproblemas de ALO con los objetivos y restricciones.

Tabla 1: Restricciones y objetivos del problema ALO.

Problema	Restricciones	Objetivo 1	Objetivo 2
A	1), 2)	Maximizar carga	
B	1), 2), 3)	Maximizar carga	Minimizar desviación del centro de gravedad
C	1), 2), 3), 4)	Maximizar carga	Minimizar desviación del centro de gravedad

Los resultados obtenidos durante la estancia son:

1. Formulación matemática de los problemas A, B y C. Para la maximización de la carga se utilizó programación lineal entera, mientras que la minimización de la desviación del centro de masa se utilizó programación cuadrática entera.
2. Se programó utilizando Python y la librería Gurobi (https://www.gurobi.com) los modelos de optimización construidos.
3. Se demostró matemáticamente la NP-completitud del problema A.

Algoritmos Determinísticos para el Contagio en Redes Financieras

El objetivo de este estudio es la de proponer un problema formal y un algoritmo para la predicción de *shocks* en una red financiera. Para ello nos basaremos en el modelo de Eisenberg-Noe[1]. En este modelo hay cuatro ingredientes principales: 1) un conjunto de vértices $V = \{1,2,...,n\}$ que representan a entidades financieras como los bancos, compañías de seguros y similares, 2) una matriz de responsabilidad P de tamaño $n \times n$ donde cada entrada en la matriz es no negativa y la entrada (i,j) en P representa el pago que el vértice i tiene que hacer al vértice j, 3) un vector $c = (c_1,c_2,...,c_n)$ que representa el total de pagos que le deben al vértice i de parte de entidades no financieras, 4) un vector $b = (b_1,b_2,...,b_n)$ que representa el total de pagos que se deben a entidades no financieras por cada vértice i. El "valor" (del inglés *net worth*) de un vértice es la diferencia entre los activos que posee y sus pasivos. Un *shock* a la red es un vector $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ donde $0 \le x_i \le c_i$ para cada i. De la definición de la matriz P es fácil ver que tenemos un grafo dirigido G. Este grafo G representa una red financiera.

Uno de los problemas principales con el modelo de Eisenberg-Noe es que el conjunto de aristas del grafo G se debe de conocer por completo. Sin embargo, el conjunto de aristas de G no se conoce en la práctica principalmente porque las entidades financieras solo reportan sus activos y pasivos totales. Existen estudios que intentan aproximar G utilizando la información parcial disponible. Por ejemplo, Sheldon y Maurer (1998) [1] propusieron asignar valores a las entradas de P a través de un problema de optimización donde una solución ´optima (i.e., valores de las entradas de P) es la que minimiza la cantidad de información externa. Craig y von Peter (2014)[1] realizaron un estudio estadístico sobre el sistema alemán para determinar la estructura global de G. Encontraron que el sistema alemán posee una estructura que llamaron de centro-periferia (del inglés *core-peripheric*) donde existen un núcleo pequeño de bancos grandes que prestan a muchos bancos y una periferia de bancos pequeños prestan a pocos bancos.

Otros investigaron encontraron que esta estructura de núcleo periferia está presente en muchos otros sistemas bancarios.

Antes de utilizar el modelo de Eisenberg-Noe es importante conocer el grafo G, o por lo menos, tener una buena aproximación. Por lo tanto, en esta estancia se desarrollaron algoritmos determinísticos que buscan determinar si un grafo dirigido dado presenta o no una estructura de núcleo-periferia. Los resultados obtenidos durante la estancia son.

1. Un algoritmo determinístico de búsqueda exhaustiva realiza al menos $O(n!)$ de filas de P para determinar si G de n vértices tiene o no una estructura de núcleo-periferia.
2. Para el mismo fin, se encontró un algoritmo voraz de tiempo de polinomial determinístico. Este algoritmo funciona primero ordenando las filas de P de mayor a menor utilizando el grado de la fila o vértice. Luego, se verifica si la matriz P cumple con la estructura de núcleo-periferia definida por Craig y von Peter (2014).
3. Se formuló un modelo de *property testing* [4] para buscar un algoritmo de tiempo sublineal.

El siguiente paso en la investigación es la de encontrar un algoritmo de tiempo sublineal para detectar estructuras de núcleo-periferia en grafos en redes complejas. Considerando que el objetivo es un algoritmo probabilístico de tiempo sublineal, se decidió utilizar técnicas de *property testing* para este fin. El ´área de *property testing* es un campo de estudio en complejidad computacional de algoritmos en donde se busca identificar rápidamente propiedades estructurales de los datos de entrada.

Referencias

[1] Eisenberg, L., & Noe, T. H. (2001). Systemic risk in financial systems. Management Science, 47(2), 236-249.

[2] Sheldon, G., & Maurer, M. (1998). Interbank lending and systemic risk: An empirical analysis for Switzerland. Revue suisse d economie politique et de statistique, 134, 685-704.

[3] Craig, B., & Von Peter, G. (2014). Interbank tiering and money center banks. Journal of Financial Intermediation, 23(3), 322-347.

[4] Goldreich, O. (2017). Introduction to property testing. Cambridge University Press.

“Esta estancia de investigación fue cofinanciada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con recursos del FEEI”