

Integrador geométrico de contacto con restricciones no holonómicas

Elias Maciel^{1*}, Inocencio Ortiz¹, Christian E. Schaerer¹

¹Facultad Politécnica-Universidad Nacional de Asunción

*emaciel@pol.una.py, inortiz08@gmail.com, cschaer@pol.una.py

Introducción

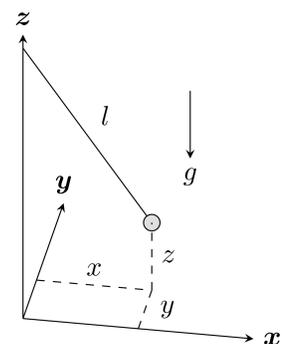
Integradores geométricos son métodos numéricos diseñados para ser compatibles con las estructuras geométricas subyacentes a las ecuaciones diferenciales. Esta compatibilidad se manifiesta en propiedades conservativas cuando se aplican a sistemas mecánicos en el contexto geométrico apropiado.

En este trabajo diseñamos un integrador geométrico para sistemas *disipativos*, y *no holonómicos*, que son aquellos cuyas restricciones no se pueden escribir en función solo de sus coordenadas, sino que además en función de sus velocidades.

Objetivos

1. Desarrollar un integrador geométrico de contacto para sistemas mecánicos no conservativos, no holonómicos, a partir de la descripción continua de la geometría subyacente en estos sistemas.
2. Contrastar el integrador desarrollado contra un integrador tradicional no geométrico aplicándolo a un sistema mecánico en concreto.

Péndulo de Foucault



$$y\dot{x} + x\dot{y} + \Omega \sin \beta (x^2 + y^2) = 0 \quad (1)$$

Metodología

1. Buscamos la descripción geométrica adecuada para sistemas no conservativos, no holonómicos. Encontramos que la geometría de contacto es aplicada a sistemas disipativos y la descripción de su dinámica puede obtenerse del principio variacional de Herglotz.
2. Para obtener el integrador usamos la discretización del principio de Herglotz junto con una discretización compatible de las ecuaciones de restricción no holonómicas.

$$\begin{cases} D_1 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) + D_2 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j) \frac{1+hD_3 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1})}{1-hD_4 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j)} = \lambda_c \Phi^c(q_j) \\ \Phi_d^c(q_j, q_{j+1}) = 0, \end{cases}$$

3. Aplicamos el integrador de contacto al péndulo de Foucault, y comparamos su comportamiento contra el integrador Runge-Kutta-Fehlberg de 4° orden.

Resultados

En las simulaciones, el valor de disipación es $\alpha = 1e - 4$. El intervalo de tiempo de integración es de 0 a 3600 s y la latitud donde se encuentra el péndulo es de $\beta = 49^\circ$ N. Con estos parámetros, el integrador de contacto y el tradicional muestran un comportamiento indistinguible en términos de energía y trayectoria descrita.

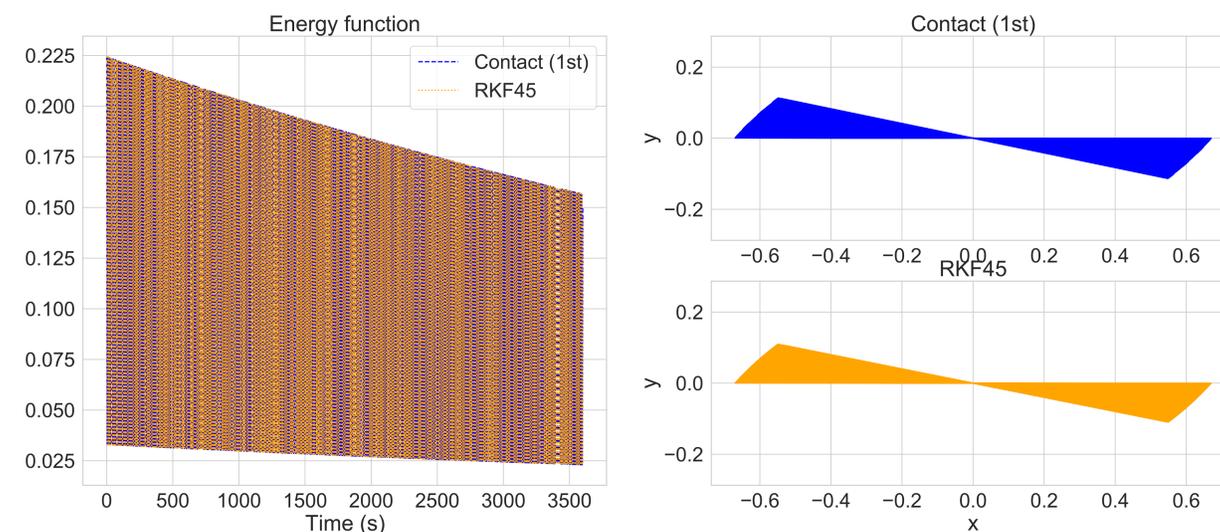


Figure 1: El integrador de contacto de 1^{er} orden muestra un buen comportamiento visual y una función de energía indistinguible en comparación al método tradicional Runge-Kutta-Fehlberg de 4° orden.

Conclusiones

- El integrador de contacto muestra un buen comportamiento cualitativo y en términos de energía, y preserva las restricciones de movimiento.
- El integrador propuesto incluye las restricciones de forma explícita. Mientras que en este caso, las restricciones no se encuentran explícitas en el integrador tradicional.
- Hace falta un análisis formal de error para el caso general de integradores geométricos no holonómicos.

Referencias

- [1] Anthony Bloch et al. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, 2015.
- [2] Jorge Cortés and Sonia Martínez. "Non-holonomic integrators". In: *Nonlinearity* 14.5 (2001), p. 1365.
- [3] Manuel de León, Víctor Manuel Jiménez, and Manuel Lainz Valcázar. "Contact Hamiltonian systems with nonholonomic constraints". In: *arXiv preprint arXiv:1911.05409* (2019).
- [4] Mats Vermeeren, Alessandro Bravetti, and Marcello Seri. "Contact variational integrators". In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 52.44 (2019), p. 445206.

Agradecimientos

Los autores agradecen el respaldo recibido de parte de FEEI-CONACYT-PROCIENCIA y el proyecto POSG17-62-PROCIENCIA-CONACYT.